a

Liczby ujemne

Pewnego słonecznego popołudnia Jaś spacerował polną dróżką z koszykiem jabłek w ręce. Gdzieś w krzakach przycisnął go mały głód[[1]](#footnote-1). Spojrzał żałobnie na dwa lśniące w słońcu jabłka wewnątrz koszyka… Czymże są dwa jabłka w obliczu Jasiowego apetytu? W końcu ścisk w żołądku nie dał za wygraną. Jaś zjadł trzy jabłka. Ile jabłek zostało w koszyku?

Mniej niż zero

Intuicje

W temacie o odejmowaniu dość niechętnie wypowiadaliśmy się na temat brawurowych prób odejmowania większej liczby od mniejszej. Jako że w matematyce nie ma rzeczy niemożliwych[[2]](#footnote-2), pora sprostać takiemu wyzwaniu. Liczby ujemne służą do przedstawiania wartości mniejszych niż 0. Liczba -1 (czyt. minus jeden) ma wartość o 1 mniejszą niż zero, -2 to dwa poniżej zera itd. Jeśli rozszerzymy pojęcie liczb naturalnych o liczby ujemne, dostaniemy dość pokaźną kolekcję:

…, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, …

Możemy dopisywać kolejne liczby po lewej i po prawej stronie tak długo, jak chcemy.

Z liczbami ujemnymi najczęściej spotykamy się, odczytując pogodę na termometrze.

* Przy temperaturze 40C umiera się z gorąca.
* Przy temperaturze 30C narzeka się na upał i wzywa majstra od klimatyzacji.
* Przy temperaturze 20C jest komfortowo, ale nikt nie zwraca na to uwagi.
* Przy temperaturze 10C robi się chłodno i ludzie marudzą, że lato się kończy.
* Przy temperaturze 0C narzeka się na mróz. Woda ma dość, więc zamarza.
* Przy temperaturze -10C ludzie marudzą, że w pięciu warstwach ubrania jest niewygodnie.
* Przy temperaturze -20C umiera się z zimna[[3]](#footnote-3).

Nazewnictwo

Intuicje

Zarówno *liczb dodatnich* (na prawo od zera) jak i liczb ujemnych (na lewo od zera) jest nieskończenie wiele. Liczby ujemne, zero i liczby dodatnie nazywamy wspólnie[[4]](#footnote-4) *liczbami całkowitymi*.

Kreska stojąca przed liczbami ujemnymi to symbol „minus” – taki sam, jakiego używamy przy odejmowaniu liczb. Jego rolą jest określenie *znaku liczby* – każda[[5]](#footnote-5) liczba w matematyce jest dodatnia, ujemna albo jest zerem. Czasami liczby ujemne wraz z zerem obejmuje się mianem *niedodatnie*, a liczby dodatnie wraz z zerem nazywa się *nieujemnymi*.

Liczby, które różnią się tylko znakiem, nazywamy *przeciwnymi*.

* Liczby 2 i -2 to liczby przeciwne
* Liczby 2372783 i -2372783 to liczby przeciwne
* Liczba 0 jest przeciwna sama do siebie

Jeśli zaniedbamy znak, liczby przeciwne będą takie same. Mówimy, że liczby przeciwne są równe co do *wartości bezwzględnej*. Wartość bezwzględna liczby to jej wartość z pominięciem znaku. Symbolicznie zapisujemy ją za pomocą dwóch pionowych kresek:

* Wartość bezwzględna liczby -10 wynosi 10: |-10|=10
* Wartość bezwzględna liczby 6 wynosi 6: |6|=6
* Wartość bezwzględna liczby 0 wynosi 0: |0|=0

Dodawanie i odejmowanie liczb ujemnych

Intuicje

Liczby całkowite dobrze się prezentują na osi liczbowej:

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

Dzięki niej łatwo uzmysłowić sobie istotę dodawania i odejmowania liczb.

Przypuśćmy, że chcemy dodać liczby 3 i 5. Nasze pytanie brzmi „Jeśli do liczby 3 dodamy 5, ile otrzymamy?”. Oś liczbowa zwraca odpowiedź: znajdujemy na osi liczbowej trójkę, a następnie skaczemy o 5 pozycji w prawo i lądujemy na ósemce.

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

Podobnie, gdybyśmy chcieli wykonać odejmowanie 6 – 4, zaczęlibyśmy od liczby 6, przeskoczyli o 4 pozycji w prawo i skończyli na dwójce.

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

Podobnie rzecz się ma w przypadku liczb ujemnych.

* –7 + 5 = –2

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

* 8 – 12 = –4

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

Zastanówmy się, co gdyby chcieć dodać do 4 liczbę -2. Możemy skorzystać z przemienności dodawania, by otrzymać

4 + (-2) = -2 + 4 = -2

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

Liczbę -2 zapisaliśmy w nawiasie, ponieważ 4 +-2 wygląda głupio. Liczby ujemne zapisujemy w nawiasie, jeśli przed nimi stoi jakiś znak działania. Po znaku równości można zapisać liczbę ujemną bez nawiasu.

Powyższe działanie możemy ugryźć inaczej: na osi liczbowej zaczynamy od czwórki i przesuwamy się o -2 pozycji w prawo… tylko co to znaczy? Zauważmy pewne tendencje:

* 4 + 3 = 7

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

* 4 + 2 = 6

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

* 4 + 1 = 5

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

* 4 + 0 = 4

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

* 4 + (-1) = 3

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

* 4 + (-2) = 2

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

Rzeczywiście: przeskakiwanie o -2 pozycje w prawo jest tym samym, co przeskakiwanie o dwie pozycje w lewo. A przecież przeskakiwanie w lewo symbolizuje odejmowanie.

4 + (-2) = 4 – 2 = 2

To dość ogólna zasada: dodawanie liczby ujemnej jest równoważne odejmowaniu liczby do niej przeciwnej. Występujące obok siebie + i – zwykle można zastąpić pojedynczym minusem.

Zastanówmy się jeszcze nad odejmowaniem liczby ujemnej. Działanie 5 – (–3) możemy rozumieć jako „przesunięcie piątki o -3 pozycje w lewo”, a więc „przesunięcie piątki o 3 pozycje w prawo”

5 – (–3) = 5 + 3 = 8

**-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ..**

Odejmowanie liczby ujemnej jest równoważne dodawaniu liczby do niej przeciwnej. Dwa znaki – występujące obok siebie możemy zastąpić pojedynczym znakiem +.

* Stefan z 30 zł w portfelu wybrał się do cukierni „Drożdże Bogdana”. Kupił pięć rogalików za 3 zł, zostało mu więc 15 zł.

30 zł – 5 3zł = 30 zł – 15 zł = 15 zł

Czekając na wydanie reszty, spostrzegł niebiański tort biszkoptowy wyceniony na 50 zł. Wiedząc, że nie może mu się oprzeć, kupił tort na krechę. Teraz Stefan jest winien Bogdanowi 35 zł.

15 zł – 50 zł = –35 zł

Można powiedzieć, że stan konta Stefana wynosi –35 zł.

* Po powrocie do domu Stefan zaczął buszować w Internecie. Reklama „wyciskarki do cytryn za jedyne 20 zł” wyskoczyła w przeglądarce tak nachalnie, że Stefan zdecydował się na zakup. Zrealizował zamówienie na stronie sprzedawcy i zobowiązał się do „płatności przy odbiorze”. Oznacza to, że stan konta Stefana jeszcze zmalał – Stefan dodał sobie kolejny dług do zapłaty

–35 zł + (–20 zł) = –55 zł

* Następnego dnia Stefan znalazł na chodniku banknot 50 zł. Uradowany od razu zapłacił Bogdanowi za tort. Jego stan konta wzrósł, chociaż nadal jest zadłużony.

–55zł + 50 zł = –5 zł

* Wieczorem Stefan uświadomił sobie, że nienawidzi cytryn. Złożył rezygnację z zamówienia. W ten sposób pozbył się długu na 20 zł (z jego stanu konta został wymazany dług na 20 zł).

–5 zł – (–20 zł) = 15 zł

Mnożenie i dzielenie liczb ujemnych

Intuicje

Mnożenie to po prostu wielokrotne dodawanie. Działanie 5 (-2) możemy interpretować jako

(-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -10

Jeśli tylko jeden z czynników jest ujemny, sprawa nie jest skomplikowana. Jak jednak rozumieć działanie

(-3) (-2) ?

Wyobraźmy sobie kolejne wielokrotności liczby -2

**0**

**-10**

-2

-2

-2

-2

-2

**4**

-2

-2

**-8**

-2

-2

-2

-2

**-6**

-2

-2

-2

**-4**

-2

-2

**-2**

-2

**0**

**2**

-2

**4**

-2

-2

**6**

-2

-2

-2

Ponownie okazuje się, że podwójny minus daje plus:

(-3) (-2) = 6

Dzielenie liczb ujemnych wygląda podobnie. Skoro

5 (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -10

to

(-10) : 5 = -2

a także

(-10) : (-2) = 5

Działania na liczbach ujemnych przebiegają właściwie tak samo jako działania na liczbach dodatnich. Trzeba jedynie uważać na znaki.

* Jeśli w mnożeniu lub dzieleniu obydwa elementy są dodatnie, wynik będzie dodatni.
* Jeśli w mnożeniu lub dzieleniu tylko jeden element jest ujemny, wynik będzie ujemny.
* Jeśli w mnożeniu lub dzieleniu obydwa elementy są ujemne, wynik będzie dodatni.

Warto mieć na uwadze raczej intuicyjną regułę, że „dwa minusy dają plus”, a „jeden minus i jeden plus dają minus”.

* Stefan – znany lekkoduch – zaciągnął pożyczkę na 200 zł u sześciu różnych osób. Jego konto jest 1200 zł na minusie.

6 (–200 zł) = –1200 zł

* Sytuacja wygląda kiepsko, więc Stefan zadzwonił do czterech znajomych sprzed lat, którzy winni mu byli przysługę. Stefan i jego kumple podzielili zadłużenie pomiędzy siebie – teraz każdy musi się zrzucić po 240 zł.

–1200 zł : 5 = –240 zł

* Marcel i Gucio niesamowicie śmierdzą. Zawsze, kiedy siedzą w klasie, uprzykrzają życie towarzyszom. Gdyby stworzyć „punkty przyjemności zapachu” każdy z nich miałby –10 punktów. Dzisiejszego dnia zdarzył się cud: obydwoje nie przyszli na zajęcia. W klasie od razu czuć niespotykany powiew świeżości na +20 punktów.

(–2) (–10) = 20

1. TM [↑](#footnote-ref-1)
2. Z wyjątkiem dzielenia przez zero… [↑](#footnote-ref-2)
3. Chyba że jest się ciepłą kluchą. [↑](#footnote-ref-3)
4. Śmiało, przyłączcie się. [↑](#footnote-ref-4)
5. przynajmniej na razie [↑](#footnote-ref-5)